

# Représentation non entière du transfert de chaleur par diffusion. Utilité pour la caractérisation et le contrôle non destructif thermique

J.-L. Battaglia\*, L. Puigsegur, A. Kusiak

Laboratoire « énergétique et phénomènes de transfert », UMR 8508, esplanade des arts et métiers, 33405 Talence cedex, France

Reçu le 19 avril 2002 ; accepté le 28 mars 2003

## Résumé

Les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires sont utilisés pour la représentation du processus de diffusion de la chaleur dans les milieux homogènes. Cette représentation est continue vis-à-vis de la variable temporelle et exacte en regard de la fonction de transfert de référence exprimée dans le domaine transformé de la variable de Laplace. Le modèle non entier correspondant à chaque configuration traitée peut être significativement réduit et permet de retrouver, quelque soit l'ordre de réduction, les comportements asymptotiques. Cette représentation est utilisée en tant que système identifié dans le cadre d'expériences de caractérisation thermique de type face avant. Ces expériences sont ici basées sur la mesure d'une réponse thermique à une évolution aléatoire du flux de chaleur. On montre notamment l'intérêt de la méthode pour reconstruire la réponse impulsionnelle du système étudié à partir d'un modèle comportement peu de paramètres. Le domaine de confiance de cette réponse reste grand sur tout le domaine temporel exploré.

© 2003 Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

The non integer differentiation operator is used in order to express the model of heat diffusion in homogeneous materials. This continuous representation, according to the time variable, is exact with respect to the transfer function expressed in the Laplace variable domain. A significant reduction can be performed on the non integer model and the asymptotic behaviours of the system are exactly described whatever the reduction order. This reduced noninteger model is used as an identified system in the framework of front face thermal characterization experiments. These experiments consist in measuring the temperature at the surface of the material where a random heat flux is applied. This approach leads to rebuild the impulse response of the concerned system from a weak number of parameters. On the other hand, the confidence domain of the impulse response remains good on the entire time domain concerned by the experiment.

© 2003 Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés* : Dérivation non entière ; Diffusion de chaleur ; Caractérisation thermique ; Contrôle non destructif ; Identification de système

*Keywords* : Non-integer differentiation; Heat diffusion; Thermal characterization; Non-destructive control; System identification

## 1. Introduction

Dans ce papier nous donnons une représentation continue du modèle de diffusion unidirectionnel de la chaleur, dans les matériaux homogènes, basée sur l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire multiple de  $\frac{1}{2}$ . Nous qualifions cette représentation de *modèle non entier*.

Nous montrons l'intérêt de cette représentation vis-à-vis de la caractérisation thermique non destructive des matériaux sur des échelles de temps très variables. Les expériences de caractérisation thermique sont souvent basées sur

la mesure de température en un ou plusieurs points de la surface sur laquelle est appliquée une sollicitation en flux. On parle dans ce cas de mesure « face avant » dont de nombreuses applications sont présentées dans la littérature, voir par exemple [1–8]. Elle constitue la configuration de référence pour l'exposé de notre méthode. Ainsi, la fonction de transfert caractérisant le processus de diffusion dans le matériau, liera donc la transformée de Laplace de la température sur la face avant à celle du flux. Cette fonction est connue de façon analytique exacte dans de nombreuses configurations 1D, le lecteur pourra notamment consulter l'ouvrage de Maillet et al. [9] à ce sujet.

La méthode que nous développons repose sur l'utilisation de l'opérateur de dérivation non entière. J. Fourier, dans

\* Corresponding author.

Adresse e-mail : [jlbt@lept-ensam.u-bordeaux.fr](mailto:jlbt@lept-ensam.u-bordeaux.fr) (J.-L. Battaglia).

## Nomenclature

$a$	rayon du cylindre . . . . . m
$b$	rayon de la sphère . . . . . m
$C_p$	chaleur spécifique . . . . . $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
$e$	épaisseur du mur . . . . . m
$e(t)$	erreur de mesure à l'instant $t$ . . . . . K
$\mathbf{E}_K$	vecteur des résidus
$J$	critère quadratique
$H_0(s)$	fonction de transfert de référence
$\mathbf{H}_K$	matrice de régression
$K$	nombre de mesures $-1$
$L_0, L, M_0, M$	bornes de sommation des séries du modèle non entier
$N$	ordre de réduction du modèle non entier
$R$	rayon du cylindre et de la sphère semi infinis m
$R_c$	résistance thermique . . . . . $\text{W}^{-1}\cdot\text{m}\cdot\text{K}$
$s$	variable de Laplace
$S(\alpha_i, t)$	fonction de sensibilité vis-à-vis du paramètre $\alpha_i$
$t$	temps . . . . . s
$T_0(t)$	température en face avant au temps $t$ . . . . . K
$Y(t)$	mesure de température en face avant à l'instant $t$ . . . . . K
$\mathbf{Y}$	vecteur des mesures de température

### Symboles grecs

$\alpha$	diffusivité thermique . . . . . $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
$\alpha_n, \beta_n$	paramètres du modèle non entier
$\Delta_h^\nu$	accroissement non entier d'ordre $\nu$
$\Delta t$	pas d'échantillonnage . . . . . s

$\varepsilon(t)$	résidu à l'instant $t$
$\phi(t)$	flux de chaleur . . . . . W
$\lambda$	conductivité thermique . . . . . $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
$\omega$	fréquence du signal d'excitation . . . . . Hz
$\omega_d$	fréquence caractéristique du système étudié Hz
$\omega_f$	fréquence de Nyquist . . . . . Hz
$\varphi(t)$	densité de flux de chaleur . . . . . $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$
$\rho$	masse volumique . . . . . $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
$\sigma_\theta^2$	écart type sur la grandeur $\theta$
$\theta$	vecteur des paramètres du modèle non entier
$\hat{\theta}$	vecteur estimé des paramètres du modèle non entier

### Fonctions et opérateurs spéciaux

$D^\nu f(t)$	dérivée fractionnaire d'ordre $\nu$ de $f(t)$
$E[x]$	valeur moyenne de $x$
$\Gamma$	fonction Gamma
$K_n(z)$	fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre $n$
$I_n(z)$	fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre $n$
$I^\nu f(t)$	intégrale fractionnaire d'ordre $\nu$ de $f(t)$
$\mathcal{L}[f] = \tilde{f}$	transformée de Laplace de $f(t)$
$\mathcal{F}[f(t)]$	transformée de Fourier de $f(t)$

### Indices et exposants

$\nu$	ordre d'intégration réel
-------	--------------------------

son traité sur la « théorie analytique de la chaleur » de 1822 [10], est un des premiers à montrer que la transformée intégrale « cosinus » de la dérivée d'une fonction garde un sens si l'ordre de dérivation est réel, voir plus généralement complexe. L'existence mathématique de la dérivée d'ordre fractionnaire, sera ensuite clairement établie au début du 19<sup>ème</sup> siècle par Liouville [11] puis Reimann [12], et a fait l'objet d'une abondante littérature mathématique depuis. Le lecteur trouvera dans les ouvrages de références de Miller et Ross [13], Oldham et Spanier [14] et Samko et al. [15] les définitions et démonstrations essentielles liées à cet opérateur. A partir des années 1970, correspondant à l'apparition des premiers outils informatiques, quelques applications de la dérivée d'ordre fractionnaire à différents domaines de la physique sont développées. Oldham et Spanier [16–18] donnent une représentation non entière de la loi de diffusion de Fick pour le transfert de masse dans des solutions électrolytiques assimilées à des milieux semi infinis pour la durée du transfert. Plus récemment, Engheta [19] propose une représentation de la théorie de l'électromagnétisme à partir de la représentation non entière. Eldred et al. [20] associent la dérivée non entière à la modélisation du comportement viscoélastique des structures. Enfin, comme cela a été clairement décrit par Le Metzler et Klafter [21] et Yanovsky et al.

[22], cet opérateur joue un rôle fondamental dans la modélisation du processus de diffusion dans les milieux à structure fractale. Cette liste de travaux, non exhaustive, permet de rendre compte du champ d'applications concernées par l'opérateur de dérivation non entier. Le lecteur pourra aussi se référer à l'ouvrage de synthèse de Hilfer [23] présentant différentes applications du calcul fractionnaire en Physique. On trouve peu d'applications du calcul fractionnaire dans le domaine des transferts thermiques. Citons toutefois les travaux de Kulish et al. [24] qui utilisent la représentation de l'équation de transfert sous sa forme semi différentielle pour estimer les propriétés d'un film fin à partir d'une expérience de photorélectométrie.

Dans nos précédents travaux [25,26], nous avons montré l'intérêt de la représentation non entière, au sens de l'identification de systèmes telle que présentée par Ljung [27] ou Soderström et Stoïca [28], pour la résolution de problèmes thermiques inverses. Une application de cette démarche pour l'estimation en temps réel des conditions thermiques en pointe d'outil lors d'un procédé d'usinage par tournage a été présentée dans [29,30]. Dans [31] nous avons aussi montré l'utilité de cette représentation pour l'estimation des propriétés thermophysiques de matériaux se comportant comme des milieux semi infinis pendant la durée de

l'expérience de caractérisation. Une application à l'estimation de l'effusivité d'un matériau et à la résistance thermique de contact entre le matériau et la sonde dans une expérience de caractérisation de type plan chaud est présentée dans [32]. Nous proposons ici de généraliser cette approche à la caractérisation thermique de milieux homogènes dont la dimension finie modifie le comportement asymptotique de la fonction de transfert aux temps longs.

La plan de l'article est comme suit. Dans un premier temps, nous rappelons les notions mathématiques essentielles concernant l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire. Nous mettons ensuite en évidence l'intérêt de cet opérateur dans la représentation de modèles de diffusion dans des géométries de dimensions semi infinies 1D. Nous effectuons cette représentation dans le cas du transfert 1D dans les milieux de dimension finie. Dans un deuxième temps nous montrons l'intérêt de la représentation non entière pour la caractérisation thermique de matériaux en l'illustrant sur deux configurations : l'estimation des propriétés thermophysiques d'une plaque plane homogène et l'identification d'un défaut résistif dans une plaque.

## 2. Notions mathématiques concernant l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire

Soit  $f(t)$  une fonction intégrable, c'est à dire définie et bornée, sur l'intervalle  $(a, \infty)$  sur laquelle nous effectuons  $n$  intégrations successives. On obtient :

$$\begin{aligned} {}_a I_t^n f(t) &= \int_a^t du_1 \int_a^{u_1} du_2 \cdots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n) du_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-u)^{n-1} f(u) du \end{aligned} \quad (1)$$

Comme  $(n-1)! = \Gamma(n)$ , il est alors aisé de généraliser l'expression ci-dessus à tout nombre  $n$  réel, et plus généralement complexe, et donc de définir l'intégrale d'ordre fractionnaire  $\nu$  ( $\text{Re } \nu > 0$ ), ou plus simplement l'intégrale non entière, par :

$${}_a I_t^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-u)^{\nu-1} f(u) du, \quad \text{Re } \nu > 0 \quad (2)$$

Avec  $\Gamma(\nu)$  la fonction Eulérienne de deuxième espèce définie par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty u^{\nu-1} \exp(-u) du \quad (3)$$

L'intégrale non entière s'apparente donc à un produit de convolution entre la fonction  $t^{\nu-1}$  et la fonction  $f(t)$ . En regard de notre domaine d'applications, nous restreindrons la valeur de la borne d'intégration inférieure à  $a = 0$ ,

correspondant à l'instant initial de l'expérience. Ceci qui conduit à la définition de l'intégrale non entière d'ordre  $\nu$  au sens de Reimann–Liouville et nous noterons  $I^\nu f(t) = {}_0 I_t^\nu f(t)$ . La propriété d'additivité sur l'ordre d'intégration se traduit par :

$$I^\nu I^\mu f(t) = I^{\nu+\mu} f(t), \quad \forall \text{Re}(\nu, \mu) > 0 \quad (4)$$

Ceci conduit à la définition de la dérivée non entière d'ordre  $\nu$  sous la forme :

$$\begin{aligned} D^\nu f(t) &= D^n I^{n-\nu} f(t) \\ n \in N, \text{Re}(\nu) > 0, n-1 \leq \text{Re}(\nu) < n \end{aligned} \quad (5)$$

D'après ces définitions, on constate donc que la dérivée non entière de la fonction  $f(t)$  à l'instant  $t$  s'exprime à partir de toutes les valeurs de la fonction depuis l'instant initial jusqu'à l'instant  $t$ . Cet opérateur possède donc un effet *mémoire infini* qui le distingue fondamentalement de la dérivée classique d'ordre entier. Néanmoins, les valeurs de la fonction aux instants précédents l'instant  $t$  sont pondérées par un facteur d'oubli qui est d'autant plus grand que l'on se rapproche de l'instant initial.

La représentation discrète de l'intégrale et de la dérivée non entière par Grünwald [13, p. 38] s'exprime comme :

$$D^\nu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^\nu f(t)}{h^\nu}, \quad \nu > 0 \quad (6)$$

$\Delta_h^\nu$  représente l'accroissement non entier défini par :

$$\Delta_h^\nu f(t) = \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{\nu}{j} f(t-jh), \quad t = Nh \quad (7)$$

Avec :

$$\binom{\nu}{j} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-j+1)}{j!} \quad (8)$$

Notons que la période d'échantillonnage  $h$  doit être nécessairement constante dans cette définition. L'erreur d'approximation de la dérivée commise à partir de la relation de Grünwald est inversement proportionnelle à la valeur de  $h$ . Sur la Fig. 1 nous avons tracé les dérivées et les intégrales d'ordres 0,5 et 1,5 de la fonction d'Heaviside  $H(t-\tau)$  et nous comparons la valeur exacte à l'ordre 0,5 avec le calcul discret au travers de la relation de Grünwald (7), sachant que  $D^\nu H(t-\tau) = (t-\tau)^{-\nu} / \Gamma(1-\nu)$ . L'écart entre la valeur exacte et l'approximation discrète est maximal à la discontinuité mais s'annule ensuite très rapidement.

La transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction garde le même sens que lorsque l'ordre de dérivation est entier, soit donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^\nu f(t)] &= s^\nu \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-k-1)} D^k I^{n-\nu} f(t=0), \quad \nu > 0 \\ &= s^\nu \mathcal{L}[f(t)], \quad \nu < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

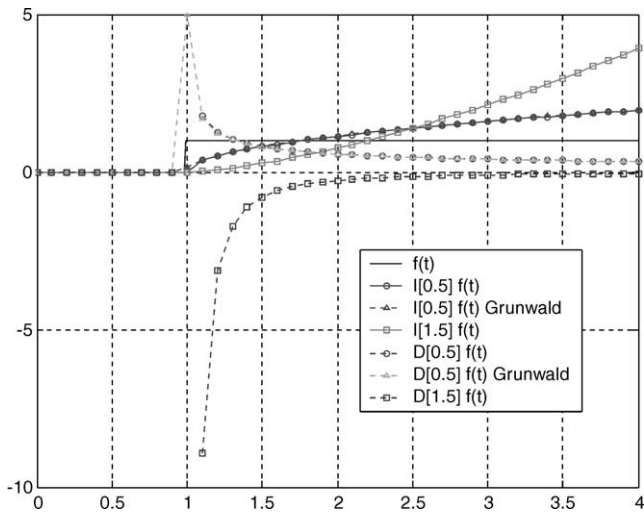


Fig. 1. Calcul de  $I^{1/2}H(t-\tau)$ ,  $I^{3/2}H(t-\tau)$ ,  $D^{1/2}H(t-\tau)$  et  $D^{1/2}H(t-\tau)$  où  $\tau = 1$  et  $H(t)$  est la fonction d'Heaviside. Comparaison avec le calcul discret par la relation de Grünwald avec  $h = 0,01$ .

Fig. 1. Computation of  $I^{1/2}H(t-\tau)$ ,  $I^{3/2}H(t-\tau)$ ,  $D^{1/2}H(t-\tau)$  and  $D^{1/2}H(t-\tau)$  where  $\tau = 1$  and  $H(t)$  is the Heaviside function. Comparison with the results from the relation of Grünwald.

$\mathcal{L}[\cdot]$  est la transformée de Laplace définie par :

$$\mathcal{L}[f(t)] = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (10)$$

### 3. Modélisation du transfert de chaleur par diffusion à partir de l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre 1/2. Illustration sur des configurations 1D

#### 3.1. Cas des milieux semi infinis

Nous notons  $H_0(s)$  la fonction de transfert liant la transformée de Laplace de la température  $T_0(t)$  à la surface d'un milieu semi infini à la transformée du flux  $\phi(t)$  imposé sur cette même surface telle que :

$$\bar{T}_0(s) = H_0(s)\bar{\phi}(s) \quad (11)$$

L'expression de cette fonction de transfert est connue de façon analytique exacte pour les trois systèmes de coordonnées : plan, cylindrique et sphérique représentés sur la Fig. 2. Ces expressions sont rappelées dans le Tableau 1 avec les comportements asymptotiques associées. Pour les géométries plane et sphérique, le passage des fonctions de transfert de référence, (75) et (77), aux modèles non entiers correspondants, (78) et (81), est immédiat par l'application de la relation (9). Pour obtenir une expression fractionnaire de la fonction de transfert de référence pour la géométrie cylindrique, on remplace les fonctions de Bessel  $K_0(z)$  et  $K_1(z)$  de la relation (76) par leurs développements en série définis par :

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} S_n + (-1)^{n+1} \ln\left(\frac{z}{2}\right) I_n(z)$$

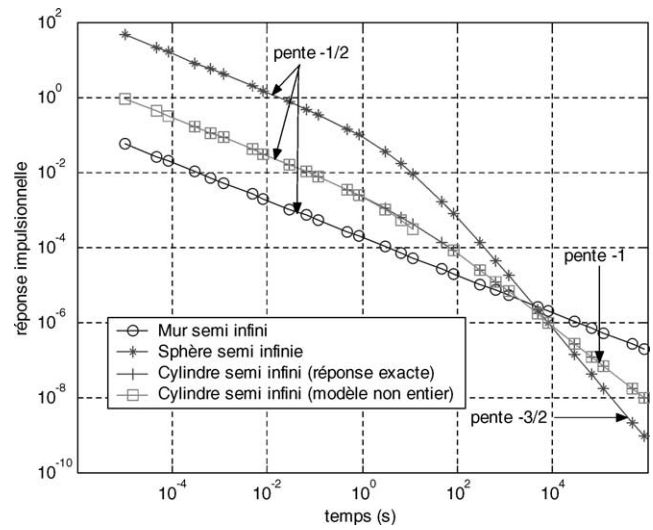


Fig. 2. Réponses impulsionnelles pour les milieux semi infinis plan, cylindrique et sphérique calculées à partir des modèles non entiers correspondants (voir Tableau 1). Les valeurs numériques sont :  $\lambda = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $R = 10^{-2} \text{ m}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $S = 1 \text{ m}^2$ .

Fig. 2. Impulse responses for the semi infinite mediums calculated from the corresponding non-integer models (see Table 1). Numerical values are:  $\lambda = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $R = 10^{-2} \text{ m}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $S = 1 \text{ m}^2$ .

$$+ (-1)^n \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{N_0} (\psi(k+1) + \psi(n+k+1)) \times \frac{(z/2)^{2k}}{k!(n+k)!}, \quad -\infty < z < \infty \quad (12)$$

Avec :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z/2)^{2k}}{k!\Gamma(n+k+1)} \quad (13)$$

$$\psi(k) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}, \quad \psi(1) = -\gamma = -0,5772157 \quad (14)$$

De la même façon, on remplace la fonction de Bessel  $I_n(z)$  dans la relation (12) par son développement en série :

$$I_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{N_0} \frac{(z/2)^{2k}}{k!(n+k)!}, \quad -\infty < z < \infty \quad (15)$$

Enfin nous introduisons dans la relation (12) le développement de la fonction logarithme défini par :

$$\ln(z) = 2 \sum_{i=0}^{N_1} \frac{1}{2i+1} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2i+1}, \quad z > 0 \quad (16)$$

On abouti finalement à une expression non entière équivalente de la fonction de transfert de référence sous la forme de la relation (79) dans le Tableau 1. Les séries (15) et (16) convergeant très lentement il est nécessaire de considérer  $N_0$  et  $N_1$  très grands pour retrouver le comportement asymptotique aux temps courts. Pour éviter cela, une solution consiste à utiliser l'approximation asymptotique de la fonction de Bessel  $K_n(z)$  est définie par [33] :

Tableau 1

Représentation non entière des solutions analytiques du problème de diffusion 1D dans les milieux semi infinis plan, cylindrique et sphérique

Table 1

Fractional representation of analytical solutions for 1D heat diffusion in semi infinite mediums

Géométrie	Plane	Cylindrique	Sphérique
$H_0(s)$	$\frac{1}{S\sqrt{\lambda\rho C_p}\sqrt{s}}$ (75)	$\frac{K_0(R\sqrt{s/\alpha})}{2\pi\lambda l R\sqrt{s/\alpha}K_1(R\sqrt{s/\alpha})}$ (76)	$\frac{1}{4\pi\lambda R(1+R\sqrt{s/\alpha})}$ (77)
Comportement asymptotique $s \rightarrow 0$	$\frac{1}{S\sqrt{\lambda\rho C_p}\sqrt{s}}$	$-\frac{\ln s}{4\pi\lambda l}$	$\frac{1}{4\pi\lambda R}$
Comportement asymptotique $s \rightarrow \infty$	$\frac{1}{S\sqrt{\lambda\rho C_p}\sqrt{s}}$	$\frac{1}{2\pi l R\sqrt{\lambda\rho C_p}\sqrt{s}}$	$\frac{1}{4\pi R^2\sqrt{\lambda\rho C_p}\sqrt{s}}$
Modèle non entier équivalent	$T_0(t) = \beta_0 I^{1/2}\phi(t)$ (78) $\beta_0 = \frac{1}{S\sqrt{\lambda\rho C_p}}$	$\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i D^{i/2}T_0(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i D^{i/2}\phi(t)$ (79) Modèle temps courts $\alpha_0 D^{1/2}T_0(t) + \alpha_1 DT_0(t)$ $= -1 + \beta_0 D^{1/2}\phi(t)$ (80) $\alpha_0 = \frac{3\pi\lambda l}{4}\beta_0$ $\alpha_1 = \frac{16\pi\lambda l R^2}{\alpha}\beta_0$ $\beta_0 = \frac{\alpha}{8R\sqrt{\alpha}}$	$\alpha_0 T_0(t) + \alpha_1 D^{1/2}T_0(t) = \phi(t)$ (81) $\alpha_0 = 4\pi\lambda R$ $\alpha_1 = \frac{4\pi\lambda R^2}{\sqrt{\alpha}}$

$$K_n(z) \approx \frac{\sqrt{\pi} e^{-z}}{\sqrt{2z}} \left( 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{(8z)^2 2!} + \dots \right)$$

$$\mu = 4n^2 \tag{17}$$

En remplaçant cette approximation dans la fonction de référence on obtient le modèle non entier, relation (80), équivalent à la fonction de référence aux temps courts. Il est alors plus judicieux d'utiliser la relation (79) aux temps longs, soit lorsque  $\sqrt{s/\alpha} R < 1$ , et la relation (80) aux temps courts, soit lorsque  $\sqrt{s/\alpha} R > 1$ .

Sur la Fig. 2 sont tracées sur une échelle logarithmique les réponses impulsionnelles pour les trois configurations semi infinies calculées à partir des modèles non entiers correspondants. L'algorithme de Stehfest [35] est utilisé pour calculer la transformée inverse de Laplace de la fonction de transfert de référence pour le cylindre semi infini. D'autre part, la simulation des modèles non entiers est réalisée à partir de l'approximation de la dérivée non entière par la relation de Grünwald (6) (voir Annexe B).

### 3.2. Milieux finis

Nous étudions maintenant le transfert de chaleur 1D dans les milieux homogènes de dimension finie plan, sphérique et cylindrique. Comme précédemment, nous ne nous intéressons qu'à la fonction de transfert liant la température sur la surface sollicitée au flux, soit :

$$\bar{T}(x=0, s) = \bar{T}_0(s) = H_0(s)\bar{\phi}(s) \tag{18}$$

Les fonctions de transfert sont connues de façon analytique exacte (voir la référence [9]) et sont reportées dans le Tableau 2.

#### 3.2.1. Transfert de chaleur dans un mur

D'après la relation (88) (Tableau 2), le comportement asymptotique de la fonction de transfert aux temps courts correspond à la fonction (75) (Tableau 1) du milieu semi infini de caractéristiques thermophysiques équivalentes. D'après la relation (9), les modèles asymptotiques exprimés dans le domaine temporel sont :

$$T_0(t \rightarrow 0) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\rho C_p}} I^{1/2}\phi(t) \tag{19}$$

et :

$$T_0(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{\rho C_p e} I^1\phi(t) \tag{20}$$

Le modèle liant le flux à la température en  $x = 0$  est basé sur l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre  $\frac{1}{2}$  aux temps courts. Cet ordre devient entier et égal à 1 aux temps longs, ce qui revient à dire que le comportement non entier disparaît lorsque la fréquence  $\omega$  du signal d'excitation devient inférieure à la fréquence caractéristique  $\omega_d$  du système étudié approximée par :

$$\omega_d = \frac{\alpha}{L^2} \tag{21}$$

où  $L$  désigne la distance entre les deux frontières du système, égale à  $e$  dans le cas du mur, et  $\alpha$  est la diffusivité du milieu. Notons que le comportement asymptotique aux temps longs sera égal à une constante si nous considérons une condition d'échange avec le milieu ambiant sur la face  $x = e$  au lieu d'une condition d'adiabaticité.

Il reste donc à démontrer l'existence d'un *raccordement analytique* entre les deux états asymptotiques. En d'autres termes peut on trouver une expression non entière exacte

Tableau 2

Représentation non entière des solutions analytiques du problèmes de diffusion 1D de la chaleur dans les milieux plan, cylindrique et sphérique de dimension finie

Table 2

Fractional representation of analytical solutions for 1D heat diffusion in finite mediums

Géométrie	Plane	Cylindrique	Sphérique
$H_0(s)$ ( $k = \sqrt{s/\alpha}$ )	$\frac{\cosh(ke)}{\lambda k S \sinh(ke)}$ (82)	$\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi a \lambda} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)}$ (83)	$\frac{b^2 \sinh(kb)}{\lambda r l (k \cosh(kb) - \sinh(kb))}$ (84)
Comportement asymptotique $s \rightarrow 0$	$\frac{1}{\rho C_p e} \frac{1}{s}$ (85)	$\frac{1}{\pi a^2 l \rho C_p} \frac{1}{s}$ (86)	$\frac{b^2}{\lambda(1-b)}$ (87)
Comportement asymptotique $s \rightarrow \infty$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{1}{\sqrt{s}}$ (88)	$\frac{1}{2\pi l a \sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{1}{\sqrt{s}}$ (89)	$\frac{b \alpha}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{s}}$ (90)
Modèle non entier équivalent	$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ $\alpha_i = \frac{e^{i-1}}{\alpha^{(i-1)/2n!}}$ $\beta_i = \frac{e^{i-1}}{\lambda \alpha^{(i-2)/2i!}}$ (92)	$\sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i D^{n_i/2} T_0(t) = \sum_{i=0}^N \beta_i D^{n_i/2} \varphi(t)$ (91) $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \omega_1 d_0$ $\alpha_3 = \omega_2 d_0 + \omega_0 d_1$ $\alpha_4 = \omega_3 d_0 + \omega_1 d_1$ $\alpha_5 = \omega_4 d_0 + \omega_2 d_1 + \omega_0 d_2, \dots$ $\beta_0 = \gamma_0 c_0, \beta_1 = \gamma_1 c_0$ $\beta_2 = \gamma_2 c_0 + \gamma_0 c_1$ $\beta_3 = \gamma_3 c_0 + \gamma_1 c_1$ $\beta_4 = \gamma_4 c_0 + \gamma_2 c_1 + \gamma_0 c_2, \dots$ (93) $\omega_i = \alpha_i$ et $\gamma_i = \beta_i$ de ()	$\beta_0 = 0, \beta_i = \frac{b^2 (2b)^n}{\alpha^{n/2n!}}$ $\alpha_0 = 0$ $\alpha_1 = 2\lambda b(1-b)$ $\alpha_i = \frac{\lambda 2^{n-1} b^n}{(n-1)! \alpha^{n/2}} \left(1 - \frac{2b}{n}\right)$ $\alpha_{N+1} = \frac{\lambda 2^N b^{N+1}}{N! \alpha^{(N+1)/2}}$ (94)

du modèle de référence qui satisfasse les solutions asymptotiques ?

Le lecteur vérifiera aisément que l'on ne retrouve pas le comportement asymptotique aux temps courts si l'on remplace directement les fonctions hyperboliques par leurs développements en série entière dans la relation (82). On obtient en effet une fonction de transfert dont le numérateur et le dénominateur sont tous deux des polynômes de  $s$  et non de  $\sqrt{s}$ . Remarquons alors que :

$$\cosh z = \frac{e^{-z}(e^{2z} + 1)}{2} \quad \text{et} \quad \sinh z = \frac{e^{-z}(e^{2z} - 1)}{2} \quad (22)$$

En remplaçant ces expressions dans la relation (82) on trouve une nouvelle expression de  $H_0(s)$  de la forme :

$$H_0(s) = \frac{e^{2ke} + 1}{\lambda k (e^{2ke} - 1)}, \quad k = \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \quad (23)$$

On remplace, dans la relation (23), la fonction exponentielle par son développement en série entière, de rayon de convergence infini, défini par :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (24)$$

On obtient alors :

$$H_0(s) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n s^{n/2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n s^{(n+1)/2}} \quad (25)$$

D'après la relation (9), le modèle liant la température en  $x = 0$  au flux s'exprime dans le domaine temporel sous la forme du modèle non entier (91) dont les paramètres sont donnés par les relations (92). Les ordres de dérivation

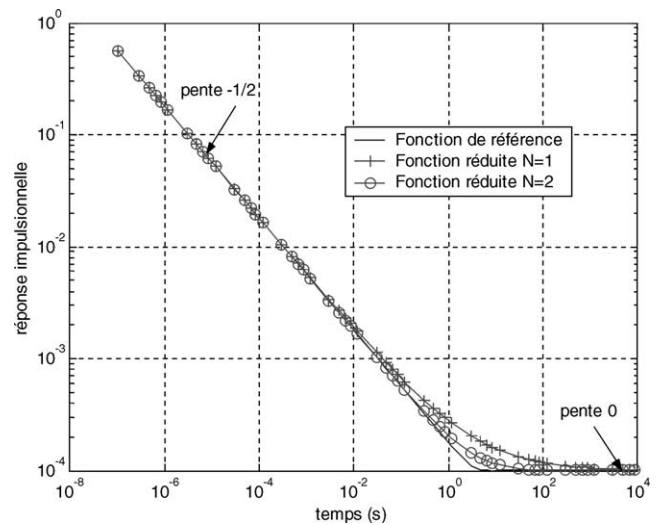


Fig. 3. Réponses impulsionnelles du mur plan d'épaisseur  $e$  calculées à partir du modèle de référence et des modèles non entiers réduits d'ordre  $N = 1$  et  $N = 2$ . Les valeurs numériques sont :  $\lambda = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $e = 10^{-2} \text{ m}$ .

Fig. 3. Impulse responses for the wall calculated from the reference model and the reduced non-integer models order  $N = 1$  and  $N = 2$ . Numerical values are:  $\lambda = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $e = 10^{-2} \text{ m}$ .

de la température et du flux sont multiples de  $\frac{1}{2}$ . Lorsque  $N$  est infini, cette représentation non entière est exacte en regard du modèle de référence (82). En tronquant les séries à un ordre  $N \geq 1$  quelconque, on obtient un modèle non entier *réduit*. Ce modèle permet de retrouver exactement les comportements asymptotiques décrits par les relations (19) et (20) quelle que soit la valeur de  $N$ . Sur la Fig. 3, sont

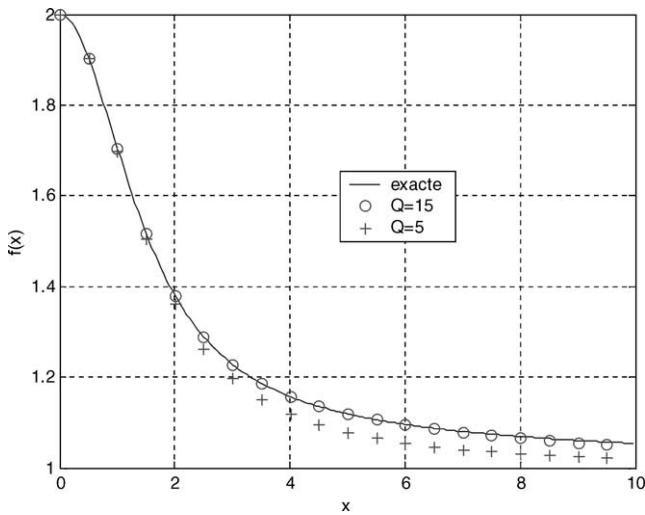


Fig. 4. Approximation de la fonction  $f(x)$  en fonction de l'ordre de troncature  $Q$  des séries.

Fig. 4. Approximation of function  $f(x)$  considering two truncate orders  $Q$  of the series.

tracées la réponse impulsionnelle exacte et celles calculées pour  $N = 1$  et  $N = 2$ , sur une échelle logarithmique. L'algorithme de Stehfest a été utilisé pour calculer la transformée inverse de Laplace de la fonction de transfert de référence (82) et on utilise la relation (6) de Grünwald pour le calcul des dérivées dans le modèle non entier réduit d'ordre  $N$  (voir Annexe B).

### 3.2.2. Transfert dans un cylindre

Si on introduit le développement en série des fonctions de Bessel  $I_n(z)$ , relation (15), dans la relation (83) on obtient un modèle entier qui ne satisfait donc pas le comportement asymptotique aux temps courts, soit la relation (89). Deux approches peuvent être envisagées. La première consiste à utiliser le développement asymptotique de la fonction de Bessel  $I_n(z)$  définit dans [33] par :

$$I_n(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 - \frac{\mu - 1}{8z} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)}{(8z)^2 2!} + \dots \right) \quad (26)$$

$$\mu = 4n^2$$

Ce développement n'est valable que pour  $z$  grand et ne permet donc pas de retrouver le comportement asymptotique aux temps longs.

On remarque que la fonction de transfert pour le cylindre s'exprime en fonction de celle du mur plan sous la forme :

$$H_{0,c}(s) = H_{0,p}(s) f(s) \quad (27)$$

La fonction  $H_{0,p}(s)$  a été définie à la relation (82) et son développement fractionnaire à la relation (25). La fonction  $f(s)$ , représentée sur la Fig. 4, est bornée entre 2 et 1. En comparant la relation (83) et la relation (27), on trouve aisément :

$$f(s) = \frac{\sinh(k) I_0(k)}{\cosh(k) I_1(k)}, \quad k = a\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \quad (28)$$

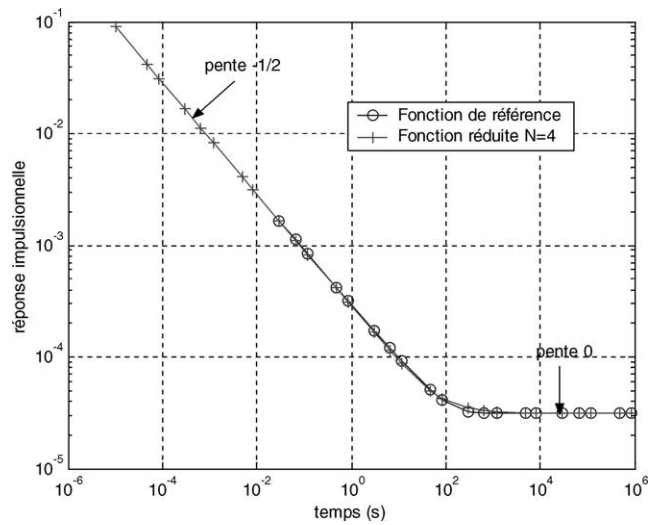


Fig. 5. Réponses impulsionnelles du cylindre calculées à partir du modèle de référence et du modèle non entier réduit d'ordre  $N = 4$ . Les valeurs numériques sont :  $\lambda = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $a = 10^{-1} \text{ m}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ .

Fig. 5. Impulse responses for the cylinder calculated from the reference model and the reduced non-integer model  $N = 4$ . Numerical values are:  $\lambda = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $a = 10^{-1} \text{ m}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ .

En introduisant les développements en série des fonctions de Bessel, relation (15), et ceux des fonctions hyperboliques, relation (22), on abouti à l'expression entière de la fonction  $f(s)$  suivante :

$$f(s) = \frac{1 + c_1 k^2 + \dots + c_p k^{2n} + \dots}{\frac{1}{2} + d_1 k^2 + \dots + d_p k^{2n} + \dots}, \quad k = a\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \quad (29)$$

Les coefficients des polynômes du numérateur et du dénominateur sont :

$$c_i = \left\{ 1, \frac{5}{12}, \frac{11}{192}, \frac{1}{384}, \dots \right\} \quad \text{et} \quad (30)$$

$$d_i = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \frac{5}{196}, \frac{1}{384}, \dots \right\}$$

Ils satisfont aux conditions limites sur la fonction, à savoir  $f(0) = 2$  et  $f(\infty) = 1$ . Sur la Fig. 4, sont tracées les fonctions  $f(s)$ ,  $f_5(s)$  et  $f_{15}(s)$ , où  $f_Q(s)$  désigne la fonction construite avec les séries tronquées à l'ordre  $Q$ . En introduisant la représentation fractionnaire (25) de la fonction de transfert  $H_{0,p}(s)$  dans la relation (27), nous aboutissons à une fonction de transfert fractionnaire exacte, lorsque  $Q \rightarrow \infty$ , pour le cylindre telle que :

$$H_{0,c}(s) = \frac{\sum_{n=0}^N \beta_n p s^{n/2}}{\sum_{n=1}^N \alpha_n p s^{(n+1)/2}} f_N(s) = \frac{\sum_{n=0}^{N+Q} \beta_n s^{n/2}}{\sum_{n=1}^{N+Q} \alpha_n s^{(n+1)/2}} \quad (31)$$

Les coefficients  $\alpha_{n,p}$  et  $\beta_{n,p}$  sont donnés par la relation (92) et nous donnons l'expression des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  à la relation (93). Nous comparons sur la Fig. 5, la réponse impulsionnelle calculée avec la fonction de référence (83) (à partir de l'algorithme de Stehfest) et celle calculée avec

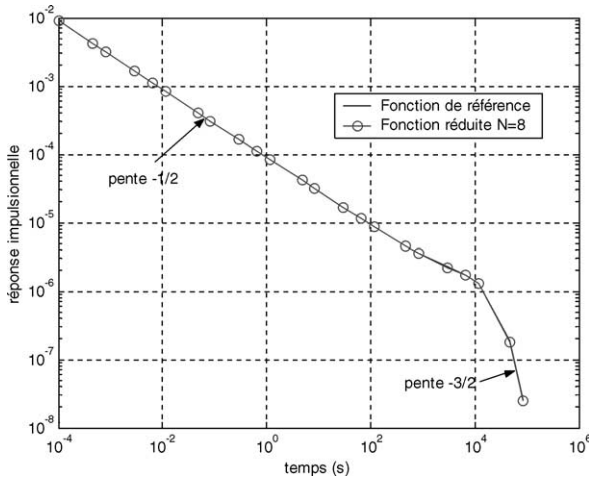


Fig. 6. Réponses impulsionnelles de la sphère calculées à partir du modèle de référence et du modèle non entier réduit d'ordre  $N = 8$ . Les valeurs numériques sont :  $\lambda = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $b = 0,5 \text{ m}$ .

Fig. 6. Impulse responses for the sphere calculated from the reference model and the reduced non-integer model order  $N = 8$ . Numerical values are:  $\lambda = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $b = 0.5 \text{ m}$ .

la fonction réduite (31) d'ordre  $N = 4$  (voir Annexe B). On vérifie que ce modèle non entier permet de retrouver exactement les comportements asymptotiques et d'assurer un raccordement satisfaisant en regard de la courbe de référence.

### 3.2.3. Transfert dans une sphère

On vérifie rapidement que si l'on remplace les fonctions hyperboliques du modèle de référence (84) par leurs développements en série entière, on obtient un modèle entier incompatible avec le comportement asymptotique au temps courts de la fonction de référence donnée par la relation (90). Nous effectuons alors la démarche identique à celle du mur en exprimant les fonctions hyperboliques à partir de la fonction exponentielle. La relation (84) devient :

$$H_0(s) = \frac{b^2(e^{2kb} - 1)}{\lambda b(k(e^{2kb} + 1) - (e^{2kb} - 1))}, \quad k = \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \quad (32)$$

En remplaçant la fonction exponentielle par son développement en série entière, on obtient :

$$H_0(s) = \frac{\sum_{n=1}^N \beta_n s^{n/2}}{\alpha_1 s^{1/2} + \sum_{n=2}^N \alpha_n s^{n/2} + \alpha_{N+1} s^{(N+1)/2}} \quad (33)$$

Nous représentons sur la Fig. 6 la réponse impulsionnelle exacte (calculée à partir de l'algorithme de Stehfest) et celles calculée à partir du modèle non entier réduit d'ordre  $N = 8$  (voir Annexe B).

### 3.3. Analyse des résultats

Les solutions analytiques obtenues précédemment pour les milieux semi infinis et finis peuvent être représentées sous la forme d'une relation liant les dérivées successives

Tableau 3

Valeurs des bornes des séries dans la relation (34) selon la géométrie étudiée

Table 3

Series limits in relation (34) according to the geometrical configurations

Géométrie	$M_0$	$M$	$L_0$	$L$
Mur semi infini	1	1	0	0
Cylindre semi infini	0	$M \rightarrow \infty$	0	$M + 1 \rightarrow \infty$
Sphère semi infinie	0	1	0	0
Mur fini	2	$M + 1$	0	$M$
Cylindre fini	2	$M + 1$	0	$M$
Sphère finie	1	$M + 1$	1	$M$

d'ordre multiple de  $\frac{1}{2}$  de la température en face avant à celle du flux sous la forme :

$$\sum_{i=M_0}^M \alpha_i D^{i/2} T_0(t) = \sum_{i=L_0}^L \beta_i D^{i/2} \varphi(t), \quad \alpha_{M_0} = 1 \quad (34)$$

On montre, en utilisant les mêmes techniques de décomposition en série fractionnaire, que cette structure reste exacte lorsque l'observation de la température s'effectue dans le milieu, soit donc :

$$\sum_{i=M_0}^M \alpha_i^x D^{i/2} T(x, t) = \sum_{i=L_0}^L \beta_i^x D^{i/2} \varphi(t), \quad \alpha_{M_0}^x = 1$$

$$\forall x > 0 \quad (35)$$

Le Tableau 3 rappelle les valeurs des bornes de sommation,  $M_0$ ,  $L_0$ ,  $M$  et  $L$ , pour les configurations géométriques étudiées précédemment. La dérivée non entière est un outil mathématique propre à la modélisation du processus de diffusion dans les milieux semi infinis. En effet, aux temps longs, les relations (88), (89) et (90) pour les milieux de dimension finie montrent que l'ordre d'intégration redevient entier. Entre ces deux comportements asymptotiques, le modèle s'exprime comme une somme de dérivées successives d'ordre multiple de  $\frac{1}{2}$ , chacune étant pondérées d'un coefficient fonction des paramètres thermophysiques. Remarquons, comme cela est démontré en Annexe A, que le comportement non entier d'un milieu semi infini peut être représenté à partir d'un réseau analogique *récurif* tel que celui représenté sur la Fig. 7. La récursivité est généralement associée à un comportement non entier, mais elle n'est pas une condition d'existence de ce comportement.

Si on considère un nombre infini de termes dans les séries du modèle (37), i.e.,  $(M, L) \rightarrow \infty$ , alors ce modèle est exact en regard de la fonction de référence correspondante. En tronquant ces séries on obtient un modèle non entier *réduit* qui permet de vérifier exactement les comportements asymptotiques et de raccorder au mieux ces solutions en fonction de l'ordre de troncature. Pour les milieux semi infinis, le remplacement des fonctions exponentielles et de Bessel par leurs développements en série entière, de rayon de convergence infini, conduit à la représentation non entière équivalente. Dans le cas des milieux de dimension finie cela conduit dans tous les cas à un modèle entier qui ne satisfait donc pas le comportement asymptotique



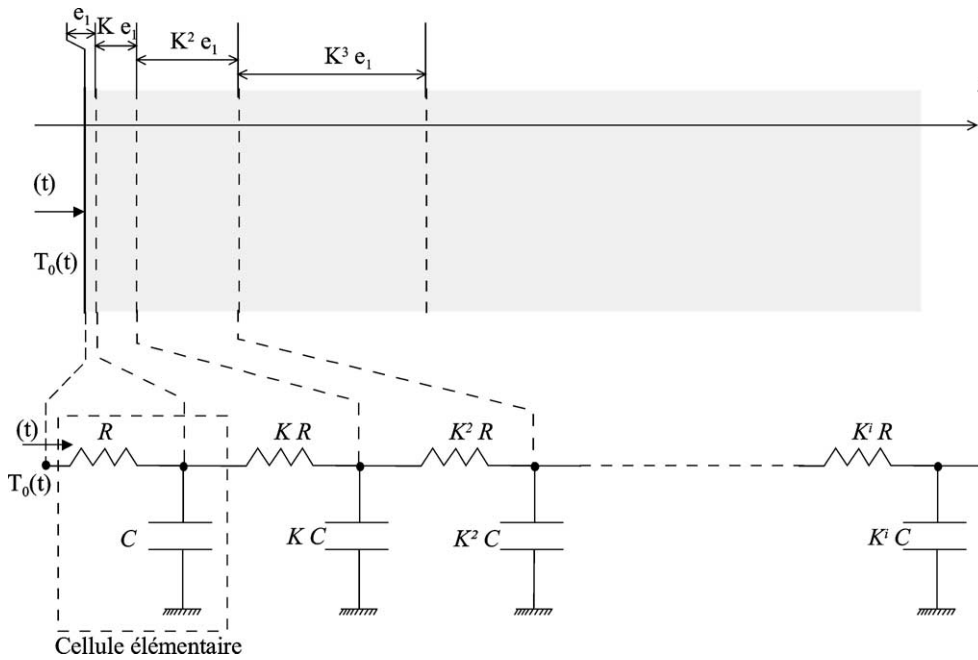


Fig. 7. Représentation analogique récursive du milieu semi infini. Quelque soit la valeur de  $K > 0$ , on trouve que le comportement de la fonction de transfert du réseau est  $H(p) = \sqrt{p}$ .

Fig. 7. Recursive representation of a semi infinite media. Whatever the value of  $K > 0$ , one find that the transfer function of the circuit is  $H(p) = \sqrt{p}$ .

aux temps courts. Il faut alors préalablement représenter la fonction de référence sous la forme d’une combinaison de fonctions exponentielles de  $\sqrt{s}$  qui permet d’aboutir à un développement fractionnaire du type :

$$H(s) = \frac{\sum_{i=M_0}^{M \rightarrow \infty} \alpha_i s^{i/2}}{\sum_{i=L_0}^{L \rightarrow \infty} \beta_i s^{i/2}}, \quad \text{avec } \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \frac{\alpha_M s^{M/2}}{\beta_L s^{L/2}}$$

et  $\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = \frac{\alpha_{M_0} s^{M_0/2}}{\beta_{L_0} s^{L_0/2}}$  (36)

#### 4. Intérêt de la représentation non entière pour la caractérisation thermique

L’hypothèse généralement adoptée pour la réalisation d’une expérience de caractérisation thermique est celle de linéarité. Or, lors d’un essai de caractérisation face avant par une méthode impulsionnelle par exemple, le respect de cette hypothèse est mis à mal du fait de la volonté d’obtenir un rapport signal sur bruit important qui nécessite souvent d’imposer une impulsion de flux de chaleur d’amplitude élevée. La solution que nous préconisons consiste à générer une excitation de flux aléatoire de faible amplitude. En effet, la densité spectrale de puissance d’une telle excitation reste élevée et constante sur tout le spectre si sa fonction d’auto corrélation s’apparente à une fonction de Dirac. Ceci est le cas des signaux gaussiens et binaires pseudo aléatoires par exemple. La représentation non entière étant continue vis-à-vis de la variable temporelle  $t$ , la température en face avant peut donc être calculée directement pour cette variation

quelconque du flux en utilisant la représentation discrète des dérivées au sens de Grünwald, relation (6). La fiabilité de la solution n’est alors fonction que de la valeur du pas de discrétisation temporelle  $h$  qui doit être le plus petit possible. Comme on le voit, il n’est pas nécessaire d’idéaliiser la forme du signal d’excitation et donc de se rapprocher au plus près des vraies conditions expérimentales.

Cette approche est donc particulièrement bien adaptée à la reconstruction de la réponse impulsionnelle  $I(t)$  du système étudié. Il suffit pour cela de remplacer  $\varphi(t)$  par la fonction de Dirac  $\delta(t)$ , dont les dérivées non entières sont connues analytiquement, dans la relation (34) et de résoudre (voir Annexe B) :

$$\sum_{i=M_0}^M \alpha_i D^{i/2} I(t) = \sum_{i=L_0}^L \beta_i \frac{t^{-i/2-1}}{\Gamma(-i/2)} \quad (37)$$

On constate que l’incertitude sur la réponse impulsionnelle est directement liée à celles sur les paramètres  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  par :

$$\Delta_I(t) = \sum_{i=L_0}^L \Delta_{\beta_i} \frac{t^{-i/2-1}}{\Gamma(-i/2)} - \sum_{i=M_0}^M \Delta_{\alpha_i} D^{i/2} I(t) - \sum_{i=M_0}^M (\alpha_i + \Delta_{\alpha_i}) D^{i/2} \Delta_I(t)$$

$\alpha_0 = 1, \Delta_{\alpha_0} = 0$  (38)

La reconstruction de la réponse impulsionnelle par cette méthode est plus fiable, car moins sensible aux erreurs de mesure, que celle obtenue à partir de méthodes non paramétriques telle que la méthode de corrélation (on pourra consulter [27] pour un exposé de cette méthode).

D'autre part, comme nous l'avons vu dans chaque configuration étudiée précédemment, les paramètres du modèle non entier réduit s'expriment en fonction des paramètres thermophysiques (voir Tableaux 1 et 2) sous la forme d'un système d'équations non linéaires du type :

$$\begin{cases} \alpha_{M_0+1} = g_1(\alpha, \lambda, \dots) \\ \vdots \\ \alpha_M = g_{M-M_0+1}(\alpha, \lambda, \dots) \\ \beta_{L_0} = g_{M-M_0+2}(\alpha, \lambda, \dots) \\ \vdots \\ \beta_L = g_{M-M_0+L-L_0+2}(\alpha, \lambda, \dots) \end{cases} \quad (39)$$

Comme nous le verrons sur les exemples d'applications exposés au Chapitre 6, l'exactitude du modèle non entier dans sa description des comportements asymptotiques permet d'élaborer une stratégie d'identification des paramètres thermophysiques ne nécessitant pas la résolution du système d'équations (39) dans son intégralité.

Signalons enfin que l'estimation des paramètres du modèle non entier (34) est linéaire au sens des moindres carrés pour la minimisation de la variable scalaire :

$$J = \| D^{M_0/2} Y(t) - D^{M_0/2} T_0(t) \|_2 \quad (40)$$

Dans cette relation,  $Y(t)$  représente la mesure de température correspondant à la valeur  $T_0(t)$  du modèle. En effet, la relation (34) peut être représentée sous la forme équivalente suivante :

$$D^{M_0/2} T_0(t) = \sum_{i=L_0}^L \beta_i D^{i/2} \varphi(t) - \sum_{i=M_0+1}^M \alpha_i D^{i/2} T_0(t) \quad (41)$$

Les fonctions de sensibilités  $S(\alpha_i, t)$  et  $S(\beta_i, t)$  de  $D^{M_0/2} \times T_0(t)$  vis-à-vis des paramètres  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont définies par :

$$S_{D^{M_0/2} T}(\alpha_i, t) = \frac{\partial D^{M_0/2} T_0(t)}{\partial \alpha_i} = -D^{i/2} T_0(t) \quad (42)$$

$$M_0 + 1 \leq i \leq M$$

$$S_{D^{M_0/2} T}(\beta_i, t) = \frac{\partial D^{M_0/2} T_0(t)}{\partial \beta_i} = D^{i/2} \varphi(t) \quad (43)$$

$$L_0 \leq i \leq L$$

Ces fonctions sont bien indépendantes des paramètres  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ .

## 5. Méthodologie d'estimation des paramètres du modèle non entier

### 5.1. Description de l'algorithme

Soit  $e(t)$  l'erreur de mesure à l'instant  $t$  définie par :

$$Y(t) = T_0(t) + e(t) \quad (44)$$

En remplaçant la valeur de  $T_0(t)$  donnée par la relation (44), dans la relation (34) on trouve :

$$D^{M_0/2} Y(t) = \sum_{i=L_0}^L \beta_i D^{i/2} \varphi(t) - \sum_{i=M_0+1}^M \alpha_i D^{i/2} Y(t) + \varepsilon(t) \quad (45)$$

Le résidu  $\varepsilon(t)$  s'exprime donc en fonction des dérivées non entières d'ordre commun  $\frac{1}{2}$  de l'erreur de mesure :

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=M_0}^M \alpha_i D^{i/2} e(t) \quad (46)$$

La relation (45) peut être représentée sous la forme de la régression linéaire suivante :

$$D^{M_0/2} Y(t) = \mathbf{H}(t) \boldsymbol{\theta} + \varepsilon(t) \quad (47)$$

Avec :

$$\mathbf{H}(t) = \left[ -D^{(M_0+1)/2} Y(t) - \dots - D^{M/2} Y(t) \right. \\ \left. \times D^{L_0/2} \varphi(t) \dots D^{L/2} \varphi(t) \right] \quad (48)$$

et :

$$\boldsymbol{\theta} = [\alpha_{M_0+1} \dots \alpha_M \quad \beta_{L_0} \dots \beta_L]^T \quad (49)$$

Si on considère  $K + 1$  mesures successives, le pas d'échantillonnage entre chaque mesure étant constant et égal à  $\Delta t$ , la relation (47) devient :

$$D^{M_0/2} \mathbf{Y}_K = \mathbf{H}_K \boldsymbol{\theta} + \mathbf{E}_K \quad (50)$$

Avec :

$$\mathbf{H}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t) \\ \mathbf{H}(t + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{H}(t + N \Delta t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (51)$$

$$\mathbf{E}_K = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \varepsilon(t + \Delta t) \\ \vdots \\ \varepsilon(t + N \Delta t) \end{bmatrix}$$

L'estimation du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  est classiquement obtenue au sens des moindres carrés linéaires par :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}_K^T \mathbf{H}_K)^{-1} \mathbf{H}_K^T D^{M_0/2} \mathbf{Y}_K \quad (52)$$

Comme le montre la relation (48), le vecteur de régression s'exprime en fonction des dérivées non entières des mesures de température et de flux à chaque instant d'échantillonnage. L'opération de dérivation amplifiant les erreurs de mesures (se reporter à la Fig. 1), il n'est pas envisageable de construire ce vecteur avec les données directement mesurées. Plutôt que de filtrer les données expérimentales [36], une solution consiste à remplacer l'opérateur de dérivation non entière par l'opérateur d'intégration non entière qui ne sera pas sensible à l'influence du bruit de mesure contenu dans ces données. Cette opération diminue cependant la sensibilité de la température au point de mesure vis-à-vis des paramètres aux temps courts. On obtient la nouvelle expression du modèle en divisant le numérateur et le dénominateur

de la fonction de transfert fractionnaire (36) par  $s^{L/2}$ . Ceci conduit à :

$$H(s) = \frac{\sum_{i=M_0}^M \alpha_i s^{-(L-i)/2}}{\sum_{i=L_0}^L \beta_i s^{-(L-i)/2}}, \quad \alpha_{M_0} = 1 \quad (53)$$

Ainsi l'expression du modèle non entier, à partir de l'opérateur d'intégration, est :

$$I^{(L-M_0)/2} Y(t) = \sum_{i=L_0}^L \beta_i I^{(L-i)/2} \varphi(t) - \sum_{i=M_0+1}^M \alpha_i I^{(L-i)/2} Y(t) + \varepsilon'(t) \quad (54)$$

Avec :

$$\varepsilon'(t) = \sum_{i=M_0}^M \alpha_i I^{(L-i)/2} e(t) \quad (55)$$

Ceci nous conduit à la nouvelle expression du vecteur des paramètres  $\theta$  par :

$$\hat{\theta} = (\mathbf{H}'_K \mathbf{H}'_K)^{-1} \mathbf{H}'_K{}^T I^{(L-M_0)/2} \mathbf{Y}_K \quad (56)$$

Avec la nouvelle expression de la matrice de régression :

$$\mathbf{H}'_K = \begin{bmatrix} \mathbf{H}'(t) \\ \mathbf{H}'(t + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{H}'(t + K \Delta t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}'(t) = [-I^{(L-M_0+1)/2} Y(t) - \dots - I^{(L-M)/2} Y(t) \times I^{(L-L_0)/2} \varphi(t) \dots \varphi(t)] \quad (57)$$

Lorsque le nombre  $K$  de données est très élevé il est plus intéressant d'utiliser la relation (56) sous sa forme récurrente. On montre (voir [27, p. 363]) que l'on peut exprimer la valeur des paramètres estimés à l'instant  $t$  à partir de ceux estimés à l'instant précédent ( $t - 1$ ) par :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t - 1) + \mathbf{L}(t)[y(t) - \mathbf{H}'(t)\hat{\theta}(t - 1)] \quad (58)$$

Avec :

$$\mathbf{L}(t) = \frac{\mathbf{P}(t - 1)\mathbf{H}'^T(t)}{\lambda(t) + \mathbf{H}'(t)\mathbf{P}(t - 1)\mathbf{H}'^T(t)} \quad (59)$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t - 1) - \frac{\mathbf{P}(t - 1)\mathbf{H}'^T(t)\mathbf{H}'(t)\mathbf{P}(t - 1)}{\lambda(t) + \mathbf{H}'(t)\mathbf{P}(t - 1)\mathbf{H}'^T(t)} \quad (60)$$

Les valeurs d'initialisation sont  $\hat{\theta}(0) = \mathbf{0}_D$  et  $\mathbf{P}(0) = 10^6 \mathbf{I}_D$ , où  $\mathbf{0}_D$  et  $\mathbf{I}_D$  sont respectivement le vecteur nul et la matrice identité de dimension  $D = M - M_0 + L - L_0 + 1$ .

### 5.2. Domaine d'incertitude des paramètres estimés

Si l'on remplace la valeur de  $I^{(L-M_0)/2} \mathbf{Y}_K$  donnée par la relation (54), dans la relation (56), on obtient :

$$\hat{\theta} = \theta + (\mathbf{H}'_K \mathbf{H}'_K)^{-1} \mathbf{H}'_K{}^T \mathbf{E}'_K = \theta + (\mathbf{R}_K)^{-1} \mathbf{g}_K$$

avec  $\mathbf{E}'_K = \begin{bmatrix} \varepsilon'(t) \\ \varepsilon'(t + \Delta t) \\ \vdots \\ \varepsilon'(t + K \Delta t) \end{bmatrix}$  (61)

Cet estimateur sera non biaisé si  $E[\hat{\theta}] = \theta$  soit donc si  $E[(\mathbf{R}_K)^{-1} \mathbf{g}_K] = 0$ . Cette égalité sera vérifiée si  $\mathbf{g}_K$  est à moyenne nulle ( $E[\mathbf{g}_K] = 0$ ) et non corrélé avec  $\mathbf{R}_K$  ( $E[(\mathbf{R}_K)^{-1} \mathbf{g}_K] = E[(\mathbf{R}_K)^{-1}]E[\mathbf{g}_K]$ ). L'expression de  $\mathbf{E}'_K$  montre malheureusement que ces conditions ne peuvent pas être satisfaites même si  $e(t)$  est un bruit blanc. L'estimation au sens des moindres carrés linéaire est donc biaisée. Nous pouvons cependant considérer que la matrice de covariance renseigne sur la qualité de l'estimation bien qu'il ne soit pas possible en toute rigueur d'en déduire les écarts type sur les paramètres identifiés. Cette matrice est définie par :

$$\text{cov}(\hat{\theta}) = (\mathbf{H}'_K \mathbf{H}'_K)^{-1} \sigma_Y \quad (62)$$

L'écart type sur la mesure est approximé par :

$$\sigma_Y \approx \frac{\mathbf{E}'_K \mathbf{E}'_K{}^T}{K} \quad (63)$$

Dans le cas de l'estimation récurrente, relation (58), la théorie de Kalman montre que :

$$\text{cov}(\hat{\theta}) = \mathbf{P}(t_f) \frac{\sigma_y}{2} \quad (64)$$

où  $t_f$  désigne le temps de fin des itérations.

## 6. Exploitation de la représentation non entière pour la caractérisation et le contrôle thermique non destructif

### 6.1. Premier exemple : identification des propriétés thermophysiques d'une plaque plane

L'objectif est l'estimation des propriétés thermophysiques d'une plaque mince d'épaisseur 3 mm. Nous construisons une expérience numérique censée simuler une expérience réelle de caractérisation où le flux de chaleur  $\phi(t)$  uniforme, d'amplitude 0,1 W, sera fourni par une source radiative, de type diode laser par exemple, sur une surface du matériau que l'on assimilera à un disque de rayon 5 mm. La température  $T_0(t)$  au centre du disque pourra être mesurée par un détecteur IR par exemple, voir Fig. 8. Le modèle du transfert 1D est donné dans le domaine opérationnel par la relation (82), liant la transformée de Laplace de  $T_0(t)$  à celle du flux  $\phi(t)$ . Les valeurs des paramètres utilisées pour la simulation sont :  $\lambda = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

A partir de la fonction de référence (82) et de l'algorithme de Stefest, nous calculons l'évolution de la température  $T_0(t)$  pour la variation du flux de chaleur sous la forme de la séquence binaire pseudo aléatoire représentée sur la Fig. 9. D'un point de vue pratique ce type de signal peut

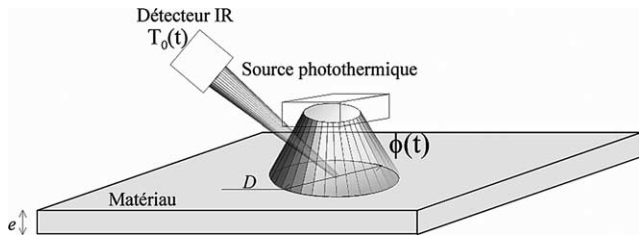


Fig. 8. Simulation d'une expérience de caractérisation thermique face avant sur un matériau homogène.

Fig. 8. Simulation of a thermal characterization experience.

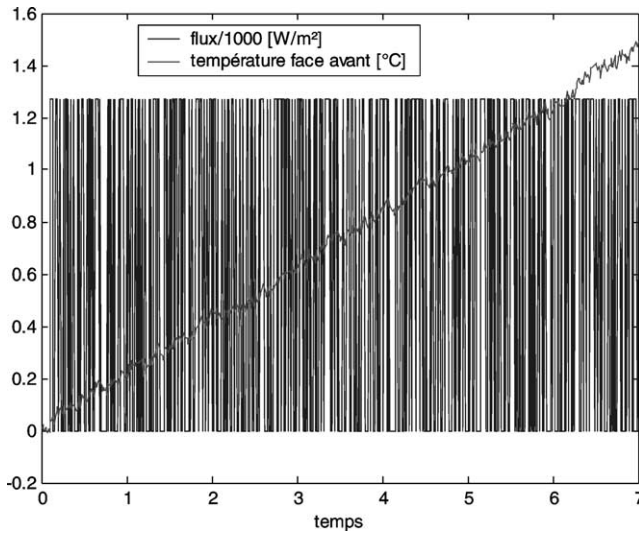


Fig. 9. Simulation numérique de la réponse en face avant du mur plan d'épaisseur  $e = 0,003$  m,  $\lambda = 10$  W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>,  $\alpha = 10^{-5}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>, pour une évolution aléatoire du flux (période d'échantillonnage  $\Delta t = 0,01$  s, temps en secondes).

Fig. 9. Computation of the temperature at the front face of the wall according to the random heat flux (time step  $\Delta t = 0.01$  s, time in seconds).

être facilement obtenu à l'aide d'un générateur de fonction analogique. La période d'échantillonnage des données est  $\Delta t = 0,01$  s. La densité spectrale de puissance (DSP) du signal  $\phi(t)$  définie par :

$$PSD(f) = |\bar{\phi}(j\omega)|^2 \quad \text{avec} \quad \bar{\phi}(j\omega) = F[\phi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (65)$$

est représentée sur la Fig. 10. Il serait nécessaire, d'après cette même figure, de générer un Dirac de flux d'amplitude 15 fois supérieur au précédent, durant l'intervalle de temps correspondant à la période d'échantillonnage  $\Delta t$ , pour obtenir la même répartition de DSP sur le domaine fréquentiel borné par la fréquence de Nyquist ( $\omega_f = 2/\Delta t$ ) et la fréquence correspondant à la durée de l'expérience.

Afin de simuler des conditions expérimentales réalistes, un bruit gaussien à moyenne nulle et d'écart type  $\sigma = 10^{-2}$  °C est superposé à la température calculée, la courbe résultante est tracée sur la Fig. 9. Durant l'intervalle de

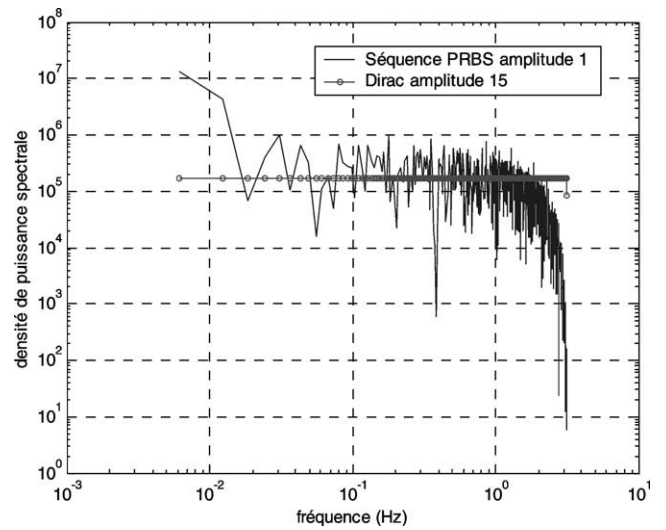


Fig. 10. Densité spectrale du signal d'excitation en fonction de la fréquence. Comparaison avec celle d'un Dirac de flux d'amplitude 15 fois plus grande.

Fig. 10. Spectral density of the heat flux according to the frequency. Comparison with that of a Dirac heat flux 15 greater magnitude.

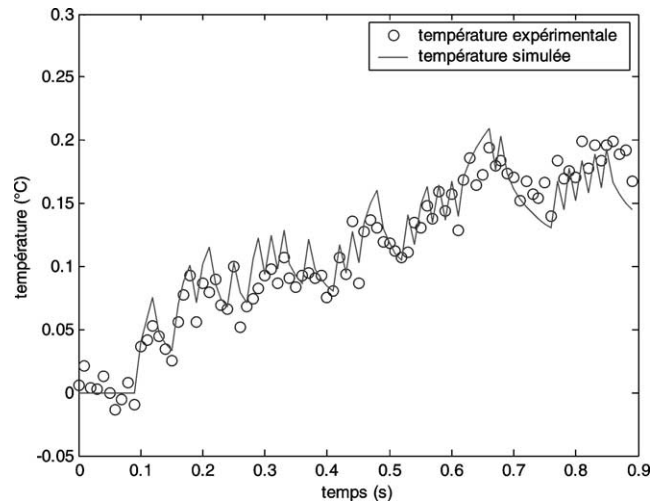


Fig. 11. Reconstruction de la température en face avant à partir du modèle non entier  $\alpha_0 T_0(t) = I^{1/2} \phi(t)$  valable aux temps courts avec  $\alpha_0 = (3,15 \pm 0,32) \times 10^3$  et comparaison avec la valeur issue de l'expérience numérique.

Fig. 11. Temperature field reconstruction from the non integer model  $\alpha_0 T_0(t) = I^{1/2} \phi(t)$  available for the short times with  $\alpha_0 = (3.15 \pm 0.32) \times 10^3$  and comparison with the experimental temperature.

temps [0; 0,9 s], le matériau se comporte comme un milieu semi infini. Conformément à la relation (19) le modèle de comportement est alors équivalent à  $\alpha_0 T_0(t) = I^{1/2} \phi(t)$ . Nous obtenons après identification :  $\alpha_0 = (3,15 \pm 0,32) \times 10^3$ , ce qui est un très bon résultat étant donné que l'effusivité exacte est  $\sqrt{\lambda \rho C_p} = 3,1623 \times 10^3$ . La comparaison entre la température expérimentale et celle calculée avec le modèle identifié est représentée sur la Fig. 11 sur le domaine temporel concerné.

Tableau 4

Estimation de la diffusivité et de la conductivité du matériau à partir des paramètres identifiés du modèle non entier

Table 4

Thermal conductivity and diffusivity estimations from the identified parameters in the non-integer model

$M$	$\frac{\beta_M}{\alpha_{M-2}} \propto \frac{1}{\rho C_p e}$	$\rho C_p$ [J·K <sup>-1</sup> ·kg <sup>-1</sup> ]	$\lambda$ [W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> ]
2	$(1,857 \pm 0,224) \times 10^{-4}$	$(0,179 \pm 0,029) \times 10^6$	$55,65 \pm 0,67$
3	$(3,515 \pm 0,274) \times 10^{-4}$	$(0,948 \pm 0,031) \times 10^6$	$10,52 \pm 0,82$

Dans un deuxième temps nous considérons la globalité du domaine temporel [0 ; 7 s] et nous recherchons les paramètres ( $\alpha_i, \beta_i$ ) du modèle non entier :  $\sum_{i=0}^{M-2} \alpha_i I^{i/2} T_0(t) = \sum_{i=1}^M \beta_i I^{i/2} \phi(t)$ . L'objectif est ici d'identifier les paramètres caractéristiques du comportement au temps longs, soit donc le rapport  $\beta_M/\alpha_{M-2}$ , correspondant théoriquement à  $1/\rho C_p e$  d'après la relation (20). La valeur de l'effusivité estimée précédemment est fixée dans le modèle, soit donc :  $\beta_1 = 1$  et  $\alpha_0 = 3,1597 \times 10^3$ . Les résultats sont portés dans le Tableau 4 en fonction de la valeur de  $M$ . Pour  $M = 3$  l'écart entre les courbes de température expérimentale et simulée devient suffisamment faible. Ceci conduit à la valeur estimée de  $\rho C_p$  égale à  $(0,948 \pm 0,031) \times 10^6$  J·K<sup>-1</sup>·kg<sup>-1</sup>. En utilisant la valeur de l'effusivité trouvée plus haut, nous obtenons l'estimation de la conductivité thermique :  $\lambda = (10,52 \pm 0,82)$  W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>, soit une erreur de 5% vis-à-vis de la valeur exacte.

La meilleure estimation de l'effusivité et de la conductivité thermiques est issue de l'identification des paramètres  $\alpha_0$  et  $\{\alpha_{M-2}, \beta_M\}$  décrivant les comportements asymptotiques aux temps courts et longs respectivement. Le fait de rajouter des paramètres supplémentaires ne permet que de raccorder au mieux ces deux comportements et donc de les rendre suffisamment distinguables l'un de l'autre.

Il est donc clair que la résolution du système non linéaire d'Éqs. (39) dans son intégralité conduirait à de moins bons résultats étant donné qu'une valeur élevée de  $M$  est nécessaire pour assurer le raccordement des comportements asymptotiques avec une erreur faible en regard de la fonction exacte. A l'inverse, très peu de paramètres sont nécessaires pour décrire et distinguer parfaitement les comportements asymptotiques.

### 6.2. Deuxième exemple : caractérisation d'un défaut résistif

Nous considérons la même expérience de caractérisation mais cette fois ci la plaque comporte un défaut que nous assimilons à une résistance thermique  $R_c$ , sans épaisseur, et localisée à une profondeur  $e_1$  par rapport à la face supérieure de la plaque tel que cela est représenté sur la Fig. 12. La face inférieure de la plaque est supposée parfaitement isolée. Pour les simulations nous prenons :  $e = 3$  mm,  $e_1 = 1$  mm,  $\alpha = 10^{-5}$  m·s<sup>-2</sup>,  $\lambda = 10$  W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>,  $R_c = 10^{-3}$  m<sup>2</sup>·K·W<sup>-1</sup>. Les propriétés thermophysiques, effusivité et

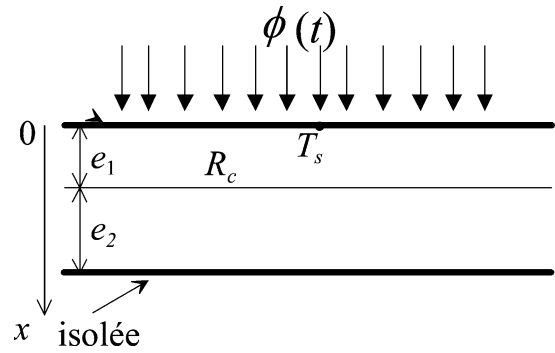


Fig. 12. Expérience de caractérisation d'un défaut résistif dans une plaque.

Fig. 12. Thermal characterisation of a 1D defect in a wall.

conductivité thermiques, du matériau sain sont supposés connus (estimées à partir de l'expérience de caractérisation décrite au paragraphe précédent par exemple). Nous cherchons donc ici à mettre en évidence le défaut au travers d'une mesure face avant pour une évolution aléatoire du flux.

D'après Mailliet et al. [5], la fonction de transfert liant la température sur la face supérieure de la plaque au flux est telle que :

$$\bar{T}_s(s) = H_0(s)\bar{\phi}(s) \quad (66)$$

Avec :

$$H_0(s) = \frac{\cosh(ke) + R_c \lambda k \cosh(ke_1) \sinh(ke_2)}{\lambda k \sinh(ke) + R_c \lambda^2 k^2 \sinh(ke_1) \sinh(ke_2)}$$

$$k = \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \quad (67)$$

es comportements asymptotiques de la fonction  $H_0(s)$  sont :

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_0(s) = \frac{1}{\rho C_p e} \frac{1}{s} \quad (68)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H_0(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (69)$$

Nous obtenons un développement fractionnaire de la fonction de référence en exprimant les fonctions hyperboliques à partir de la fonction exponentielle, relation (22). Après simplification, on aboutit à :

$$H_0(s) = \frac{(e^{2ke} + 1) + (R_c \lambda k/2)(e^{2ke_1} + 1)(e^{2ke_2} - 1)}{\lambda k(e^{2ke} - 1) + (R_c \lambda^2 k^2/2)(e^{2ke_1} - 1)(e^{2ke_2} - 1)}$$

$$k = \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \quad (70)$$

En remplaçant la fonction exponentielle par son développement en série entière, on obtient le développement fractionnaire de  $H_0(s)$  :

$$H_0(s) = \frac{1 + \beta_1 \sqrt{s} + \beta_2 s + \dots + \beta_n s^{n/2} + \dots}{\alpha_2 s + \dots + \alpha_{n+1} s^{n+1/2} + \dots} \quad (71)$$

L'expression des paramètres du modèle non entier pour  $n = 9$ , en fonctions des paramètres thermophysiques, est donnée dans le Tableau 5. En limitant le développement à

Tableau 5

Expression du modèle non entier en fonction des paramètres thermophysiques du milieu avec défaut

Table 5

Expression of the parameters in the non-integer model according to the thermophysical properties of the medium with a defect

Paramètre	Expression des paramètres en fonction des propriétés thermophysiques	Paramètre	Expression des paramètres en fonction des propriétés thermophysiques
$\beta_0$	1	$\alpha_2$	$\lambda e/\alpha$
$\beta_1$	$e/\sqrt{\alpha}$	$\alpha_3$	$\lambda e^2/\alpha^{3/2}$
$\beta_2$	$(e^2 + \lambda R_c e_2)/\alpha$	$\alpha_4$	$\lambda(\frac{2}{3}e^3 + \lambda R_c e_1 e_2)/\alpha^2$
$\beta_3$	$(\frac{2}{3}e^3 + \lambda R_c e_2(e_1 + e_2))/\alpha^{3/2}$	$\alpha_5$	$\lambda^2 R_c e_1 e_2(e_1 + e_2)/\alpha^{5/2}$
$\beta_4$	$\lambda R_c e_1 e_2(e_2 + \frac{2}{3}\frac{e_2}{e_1} + e_1)/\alpha^2$	$\alpha_6$	$\frac{2}{3}\lambda^2 R_c e_1 e_2(e_2^2 + \frac{3}{2}e_1 e_2 + e_1^2)/\alpha^3$
$\beta_5$	$\frac{2}{3}\lambda R_c e_1 e_2(e_2^2 + \frac{3}{2}e_1 e_2 + e_1^2)/\alpha^{5/2}$	$\alpha_7$	$\frac{2}{3}\lambda^2 R_c e_1^2 e_2^2(e_2 + e_1)/\alpha^{7/2}$
$\beta_6$	$\frac{2}{3}\lambda R_c e_1^2 e_2^2(e_2 + e_1)/\alpha^3$	$\alpha_8$	$\frac{4}{9}\lambda^2 R_c e_1^3 e_2^3/\alpha^4$
$\beta_7$	$\frac{4}{9}\lambda R_c e_1^3 e_2^3/\alpha^{7/2}$		

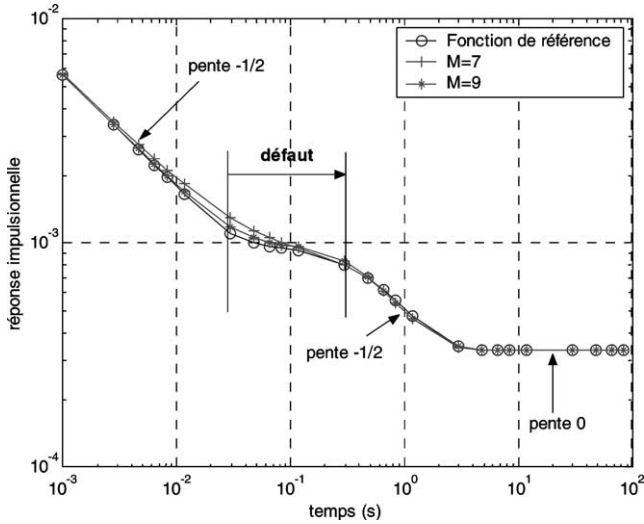


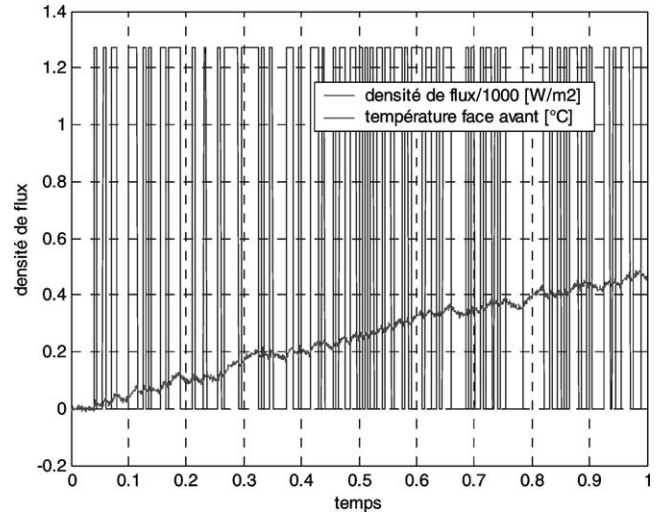
Fig. 13. Caractérisation d'un défaut résistif : réponse impulsionnelle calculée à partir de la fonction de référence et à partir des modèles non entier réduits d'ordre 7 et 9.

Fig. 13. 1D defect characterisation: impulse responses calculated from the reference function and the reduced non-integer models order 7 and 9.

l'ordre  $n = M$  puis en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fonction par  $s^{-(M+1)/2}$ , nous obtenons l'expression du modèle non entier d'ordre  $M$  correspondant :

$$\sum_{i=2}^{M+1} \alpha_i I^{(M+1-i)/2} T_0(t) = \sum_{i=0}^M \beta_i I^{(M+1-i)/2} \varphi(t) \quad (72)$$

Sur la Fig. 13 nous traçons la réponse impulsionnelle calculée à partir du modèle de référence, relation (67), et celle calculée à partir du modèle non entier réduit d'ordre  $M = 7$  et  $M = 9$ . Les comportements asymptotiques sont exactement décrits par les modèles non entiers et le raccordement entre ces deux états devient satisfaisant à partir de  $M = 9$  vis-à-vis de la réponse de référence. Les propriétés

Fig. 14. Simulation numérique de la réponse en face avant de la plaque avec défaut résistif interne pour une évolution aléatoire du flux (période d'échantillonnage  $\Delta t = 0,5 \times 10^{-3}$  s, temps en secondes).Fig. 14. Computation of the temperature at the front face of the defect wall according to the random heat flux (time step  $\Delta t = 0,5 \times 10^{-3}$  s, time in seconds).

thermophysiques, effusivité et conductivité thermiques, du matériau sain étant connues, nous avons :

$$\frac{\beta_M}{\alpha_{M+1}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \quad (73)$$

Nous simulons tout d'abord, à partir de la fonction de référence (67) la réponse au flux dont l'évolution est représentée sur la Fig. 14. La période d'échantillonnage est  $\Delta t = 0,5 \times 10^{-3}$  sec et le nombre d'échantillons est de 2000. Après superposition d'un bruit gaussien à moyenne nulle et d'écart type  $\sigma = 5 \times 10^{-3}$  °C, nous obtenons la courbe représentée sur la même figure.

Nous considérons le domaine temporel durant lequel le matériau se comporte comme un milieu semi infini, soit  $[0 ; 1$  s]. Nous identifions les paramètres du modèle réduit :

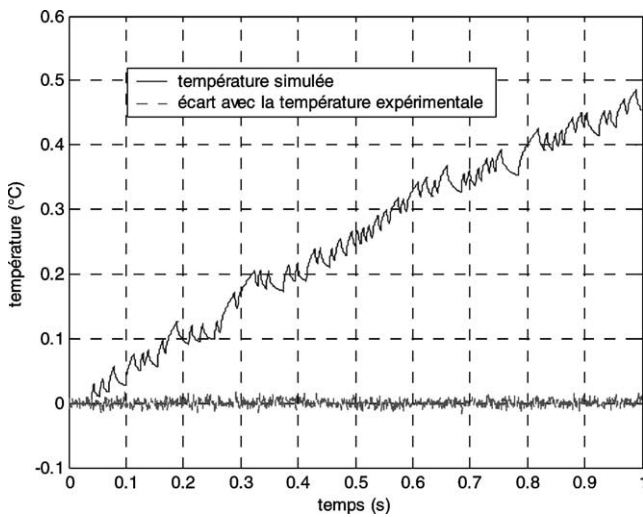


Fig. 15. Température en face avant simulée à partir du modèle non entier identifié et écart avec la mesure.

Fig. 15. Front face temperature computation from the identified non integer model and gap with the experimental one.

$$\alpha_0 T_0(t) + \alpha_1 I^1 T_0(t) = \beta_0 I^{1/2} \phi(t) + \beta_1 I^1 \phi(t) + \beta_2 I^{3/2} \phi(t) \quad (74)$$

Avec :  $\beta_0 = 1$ ,  $\alpha_0 = \sqrt{\lambda \rho C_p}$ .

Les paramètres identifiés avec leurs écarts types associés, estimés à partir de la relation (64), sont :

$$\beta_1 = -1,12 \pm 0,37, \quad \beta_2 = 11,09 \pm 1,93$$

$$\alpha_1 = (1,41 \pm 0,25) \times 10^4$$

Le temps de calcul pour l'identification est inférieur à 1 seconde (station de calcul cadencée à 1,6 GHz). Sur la Fig. 15 sont représentées les évolutions réelle et recalculée, à partir du modèle (74) avec les paramètres identifiés, de la température en face avant pour l'évolution du flux représenté sur la Fig. 14.

La réponse impulsionnelle, reconstruite à partir de la relation (37), est tracée sur la Fig. 16. Sur la même figure est tracé son domaine d'incertitude calculé à partir de la relation (38). L'accord avec la vraie réponse impulsionnelle est déjà très satisfaisant avec peu de paramètres. Le modèle (74) est donc assez pertinent pour mettre en évidence la présence du défaut dans la plaque au travers de la reconstruction de la réponse impulsionnelle. Cependant, ce modèle n'est pas suffisant pour estimer les valeurs de  $R_c$  et  $e_1$  étant donné, comme nous l'avons montré sur la Fig. 13, qu'un ordre de réduction égal au moins à 9 est nécessaire pour raccorder, avec un minimum d'erreur vis-à-vis de la réponse exacte, les comportements asymptotiques. Il est donc plus judicieux d'utiliser la réponse impulsionnelle reconstruite à partir du modèle identifié à la relation (74) et d'estimer  $R_c$  et  $e_1$  à partir du modèle de référence (67).

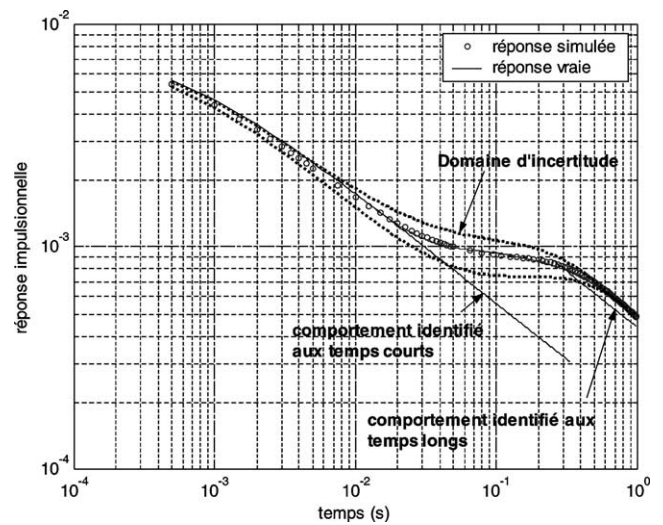


Fig. 16. Réponse impulsionnelle reconstruite à partir du modèle non entier identifié avec son domaine d'incertitude.

Fig. 16. Impulse response built from the non integer identified model with its uncertainty domain.

## 7. Conclusion

Nous avons mis en évidence la cohérence de la représentation non entière, d'ordre de dérivation multiple de  $\frac{1}{2}$  avec le processus de diffusion unidirectionnelle de la chaleur dans les milieux de dimension infinie et finie. La représentation non entière issue de la forme fractionnaire de la fonction de transfert de référence est continue et exacte. On peut néanmoins significativement réduire le nombre de termes apparaissant dans le modèle non entier. On constate que quelque soit l'ordre de réduction, les comportements asymptotiques restent exactement décrit par le modèle non entier. Cette réduction n'affecte donc que le raccordement entre ces comportements extrêmes. Enfin, les paramètres du modèle non entier sont explicitement exprimés à partir des caractéristiques thermophysiques et géométriques du système étudié.

L'identification des paramètres du modèle non entier réduit repose sur une minimisation au sens des moindres carrés linéaires. La non linéarité, originellement présente sur les paramètres dans l'expression de la fonction de transfert de référence, se retrouve en fait dans l'expression des paramètres du modèle non entier en fonction des paramètres thermiques. Afin de minimiser l'influence du bruit de mesure sur l'estimation des paramètres, le modèle non entier est exprimé à partir de l'opérateur d'intégration, la dérivation amplifiant l'erreur de mesure. Enfin, une méthode d'estimation linéaire récursive est utilisée afin de traiter plus rapidement une grande quantité de données.

Outre l'intérêt d'utiliser cette représentation pour l'identification de système thermique (on se reportera aux travaux antérieurs déjà publiés dans ce domaine [30,31]), nous avons montré son intérêt vis-à-vis de la caractérisation thermique des matériaux. En effet, la représentation non entière étant continue vis-à-vis de la variable temporelle, elle permet de

calculer l'évolution de la température en face avant pour une évolution aléatoire du flux de chaleur. Générer une telle évolution permet d'une part de conserver une densité spectrale du signal importante sur tout le domaine fréquentiel exploré et, d'autre part, de rester dans le domaine de linéarité du modèle. Dès lors, à partir des mesures de températures et de flux, on identifie les paramètres du modèle non entier permettant de reproduire au mieux l'évolution mesurée de la température puis on reconstruit la réponse impulsionnelle. On obtient ainsi une réponse impulsionnelle fiable qui peut être directement utilisée, au travers de la fonction de transfert exacte, pour estimer les paramètres thermiques concernés. Cependant, ces paramètres peuvent être directement estimés à partir des paramètres du modèle non entier, s'ils apparaissent dans l'expression des comportements asymptotiques.

### Annexe A. Représentation analogique récursive du comportement non entier diffusif dans un milieu semi infini

Considérons le milieu plan semi infini dans la direction  $z$ , tel que représenté sur la Fig. 7, et réalisons une discrétisation de ce milieu en considérant un pas d'espace variable tel que :  $\delta z_1 = e_1$ ,  $\delta z_2 = K \delta z_1 = K e_1$ ,  $\delta z_3 = K \delta z_2 = K^2 e_1, \dots, \delta z_i = K \delta z_{i-1} = K^i e_1$ . Chaque couche du matériau de conductivité  $\lambda$  et de capacité thermique  $\rho C_p$  peut être modélisée à partir de la cellule RC élémentaire représentée sur la Fig. 7, avec :  $R_i = \delta z_i / \lambda = K^i e_1 / \lambda$  et  $C_i = \delta z_i \rho C_p = K^i e_1 \rho C_p$ . Ainsi le milieu semi infini peut être modélisé au travers du réseau analogique représenté sur la Fig. 7. La fonction de transfert du réseau est :

$$H(p) = R + \frac{1}{Cp + \frac{1}{KR + \frac{1}{K^2 Cp + \frac{1}{K^3 R + \frac{1}{K^4 Cp + \dots}}}}}$$

Que l'on peut encore écrire :

$$H(p) = R + \frac{1}{Cp + \frac{1}{KH(K^2 p)}}$$

Soit :

$$H(p) = R + \frac{KH(K^2 p)}{K Cp H(K^2 p) + 1}$$

Le milieu étant semi infini, on doit retrouver le comportement non entier de la fonction de transfert aussi bien aux temps courts que longs. Or, on remarque que :

$$\lim_{p \rightarrow 0} H(p) = \infty, \quad \lim_{p \rightarrow 0} pH(p) = 0$$

On en déduit donc que, lorsque  $p \rightarrow 0$ ,  $K Cp H(K^2 p) \ll 1$  et que  $R \ll KH(K^2 p)$ . Ainsi la fonction de transfert est :

$$H(p) = KH(K^2 p)$$

La solution de cette équation fonctionnelle est :

$$H(p) = p^{-n}$$

Avec :

$$n = \frac{\ln(K)}{\ln(K^2)} = \frac{1}{2}$$

Le réseau récursif permet de simuler le comportement non entier d'ordre  $\frac{1}{2}$  de la fonction de transfert. On constate d'autre part que la valeur du coefficient de récursivité  $K$  peut être choisie quelconque strictement positive. D'un point de vue pratique il est bien sûr plus intéressant de prendre  $K > 1$ .

### Annexe B. Simulation d'un système non entier à partir de la formulation discrète de Grünwald

On remplace dans l'expression du modèle non entier,

$$\sum_{i=M_0}^M \alpha_i D^{i/2} T_0(t) = \sum_{i=L_0}^L \beta_i D^{i/2} \varphi(t)$$

l'opérateur de dérivation par sa formulation discrète au sens de Grünwald définit par :

$$D_h^v f(t) = \frac{1}{h^v} \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{v}{j} f(t - jh), \quad t = Nh$$

où  $h$  est le pas de discrétisation, correspondant par exemple à la période d'échantillonnage.

Le modèle non entier s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=M_0}^M \frac{\alpha_i}{h^{i/2}} \sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{i/2}{n} T_0((N-n)h) \\ = \sum_{i=L_0}^L \frac{\beta_i}{h^{i/2}} \sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{i/2}{n} \varphi((N-n)h) \end{aligned}$$

La valeur  $T_0(Nh)$  s'obtient en isolant le terme correspondant à  $n = 0$ , soit :

$$\begin{aligned} T_0(Nh) = \left[ \sum_{i=M_0}^M \frac{\alpha_i}{h^{i/2}} \sum_{n=1}^N (-1)^n \binom{i/2}{n} T_0((N-n)h) \right. \\ \left. + \sum_{i=L_0}^L \frac{\beta_i}{h^{i/2}} \sum_{n=1}^N (-1)^n \binom{i/2}{n} \varphi((N-n)h) \right] \\ \times \left( \sum_{i=M_0}^M \frac{\alpha_i}{h^{i/2}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Cette équation définit une équation de récurrence de dimension croissante avec le temps. D'un point de vue pratique, le calcul de  $\sum_{i=M_0}^M \alpha_i / h^{i/2} \sum_{n=1}^N (-1)^n \binom{i/2}{n} T_0((N-n)h)$  par exemple consiste à construire, pour chaque valeur de  $i$ , les vecteurs de dimension  $N$  dont les composantes sont :

$$\begin{bmatrix} \binom{i/2}{1} & \binom{i/2}{2} & \dots & \binom{i/2}{N} \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \\ \begin{bmatrix} T_0((N-1)h) & T_0((N-2)h) & \dots & T_0(0) \end{bmatrix}^T$$



puis à en effectuer le produit de convolution. Ce produit de convolution est immédiat en utilisant la transformée de Fourier rapide (FFT). On obtient lors une matrice dont on somme les colonnes en les pondérant par la quantité  $\alpha_i/h^{i/2}$ .

Cette simulation du système non entier reste valable si l'on considère l'opérateur d'intégration au lieu de la dérivation, il suffit de remplacer  $\nu$  par  $-\nu$  dans la relation de Grünwald.

## Références

- [1] A. Degiovanni, Diffusivité et méthode flash, *Rev. Gén. Thermique* 185 (1977) 420–441.
- [2] A. Degiovanni, M. Laurent, Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode « flash », *Rev. Phys. Appl.* 21 (1986) 229–237.
- [3] A. Degiovanni, Correction de longueur d'impulsion pour la mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 30 (10) (1987) 2199–2200.
- [4] J.-C. Batsale, D. Maillet, A. Degiovanni, Extension de la méthodes des quadripôles thermiques à l'aide de transformations intégrales—applications au défaut plan bidimensionnel, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 37 (1994) 111–127.
- [5] O. Faugeroux, Caractérisation thermophysique de revêtements de protection thermomécanique par méthode photothermique impulsionnelle, Thèse de l'Université de Perpignan, 2001.
- [6] S. Orain, D. Scudeller, T. Brousse, Thermal conductivity of ZrO<sub>2</sub> thin films, *Internat. J. Thermal Sci.* (1999) 537–543.
- [7] F. Rigollet, Caractérisation thermophysique d'un revêtement à l'aide d'une méthode photothermique impulsionnelle associée à la résolution d'un problème inverse, Thèse de doctorat de l'université de Provence, 1999.
- [8] G. Gervaise, Caractérisation thermique multi-échelles de revêtements réfractaires, Comportement sous excitation périodique et identification par méthodes inverses, Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier, 1999.
- [9] D. Maillet, S. André, J.-C. Batsale, A. Degiovanni, C. Moyne, *Thermal Quadrupoles. Solving the Heat Equation Through Integral Transforms*, Wiley, New York, 2000.
- [10] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.
- [11] J. Liouville, Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre pour répondre ces questions, *J. École Polytech.* 13 (1832) 1–69.
- [12] B. Riemann, Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, *Gesamelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, Teubner, Leipzig, 1876, Dover, New York, 1953, pp. 331–344.
- [13] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, 1993.
- [14] K.B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [15] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.
- [16] K.B. Oldham, J. Spanier, The replacement of Fick's laws by a formulation involving semidifferentiation, *Electroanalyt. Chem. Interfacial Electrochem.* 26 (1970) 331–341.
- [17] K.B. Oldham, J. Spanier, A general solution of the diffusive equation for semi infinite geometries, *J. Math. Anal. Appl.* 39 (1972) 655–669.
- [18] K.B. Oldham, Diffusive transport to planar, cylindrical and spherical electrodes, *Electroanalyt. Chem. Interfacial Electrochem.* 41 (1973) 351–358.
- [19] N. Engheta, Fractional derivatives, fractional integrals and electromagnetic theory, in: *1999 International Conference on Computational Electromagnetics and its Applications*, 1999, pp. 20–21.
- [20] L.B. Elred, W.P. Baker, A.N. Palazotto, Numerical application of fractional derivative model constitutive relations for viscoelastic materials, *Comput. & Structures* 60 (6) (1996) 875–882.
- [21] R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach, *Phys. Rep.* 339 (2000) 1–77.
- [22] V.V. Yanovsky, A.V. Chechkin, D. Schertzer, A.V. Tur, Lévy anomalous diffusion and fractional Fokker–Planck equation, *Physica A* 282 (2000) 13–34.
- [23] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [24] V.V. Kulish, J.L. Lage, P.L. Kamarov, P.E. Raad, A fractional-diffusion theory for calculating thermal properties of thin films from surface transient thermoreflectance measurements, *J. Heat Transfer* 123 (2001) 1133–1138.
- [25] J.-L. Battaglia, L. Le Lay, J.-C. Batsale, A. Oustaloup, O. Cois, Heat flow estimation through inverted non integer identification models, *Internat. J. Thermal Sci.* 39 (3) (2000) 374–389.
- [26] J.-L. Battaglia, O. Cois, L. Puigsegur, A. Oustaloup, Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 14 (44) (2000) 2671–2680.
- [27] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*, Prentice-Hall, 1987.
- [28] T. Söderstrom, P. Stoïca, *System Identification*, Prentice-Hall, London, 1989.
- [29] J.-L. Battaglia, O. Cahuc, J.-C. Batsale, D. Toulouse, Métrologie des transferts thermiques dans un bec d'outil en condition d'usage, *Méc. Industrielle Matér.* 52 (1) (1999) 155–161.
- [30] L. Puigsegur, O. Cois, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup, Conditions thermiques de coupe en tournage : métrologie, identification et estimation, in: *Congrès C2I 2001, Hermès 1*, 2001, pp. 63–71.
- [31] L. Puigsegur, O. Cois, J.-L. Battaglia, Utilisation de modèles d'identification non entiers pour la résolution de problèmes inverses en thermique, in: *Congrès Français de Thermique*, Elsevier, Amsterdam, 2001, pp. 745–750.
- [32] A. Coment, J.-C. Batsale, B. Ladevie, J.-L. Battaglia, Méthodologie d'estimation de l'effusivité thermique de plaques métalliques, application à la détection de défauts de soudure, in: *Congrès Français de Thermique*, Elsevier, Amsterdam, 2001, pp. 603–608.
- [33] M. Abramowitz, I.E. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Applied Mathematics Series, vol. 55, National Bureau of Standards.
- [34] J. Bisquert, A. Compte, Theory of the electrochemical impedance of anomalous diffusion, *J. Electroanalyt. Chem.* 499 (2001) 112–120.
- [35] H. Stehfest, Algorithm 368-numerical inversion of Laplace transforms, *Commun. ACM* 13 (1970) 47–49.
- [36] O. Cois, A. Oustaloup, T. Poinot, J.-L. Battaglia, Fractional state variable system for system identification by fractional model, in: *Proceedings of ECC 2001, 6th European Control Conference*, Porto, Portugal, 2001.